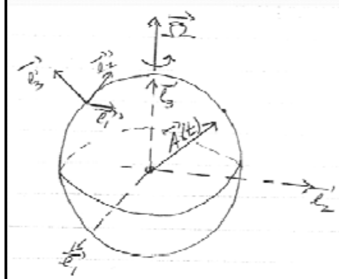
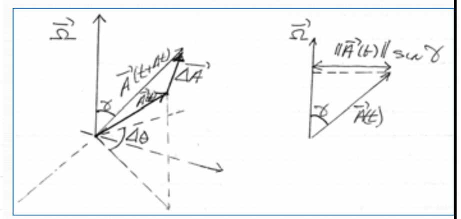
Fluides en rotation uniforme

Cours PHY-3123, 2013
Pierre Gauthier

Gravité apparente et force de Coriolis



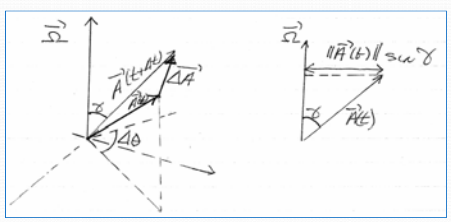


Système de coordonnées inertiel: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Système de coordonnées en rotation uniforme: $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$

Expression d'un vecteur constant dans un système en rotation uniforme

$\mathbf{A}_R$: vecteur constant dans le système en rotation



$$\Delta\theta = \left\|\vec{\Omega}\right\| \Delta t$$

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$$
$$= \Delta\theta \left\|\mathbf{A}(t)\right\| \sin\gamma$$
$$= \left\|\mathbf{A}(t)\right\| \left\|\vec{\Omega}\right\| \sin\gamma \, \Delta t$$

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta A}}{\Delta t} = \vec{\Omega} \times \mathbf{A}}$$

B: vecteur en mouvement dans le système en rotation

$$\mathbf{B} = B_i(t)\,\mathbf{e}_i' \equiv B_1(t)\,\mathbf{e}_1' + B_2(t)\,\mathbf{e}_2' + B_3(t)\,\mathbf{e}_3'$$

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_R = \frac{dB_i}{dt}\mathbf{e}_i' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_I = \frac{dB_i}{dt}\mathbf{e}_i' + B_i \frac{d\mathbf{e}_i'}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_R + \Omega \times \mathbf{B}}$$

Equations de Navier-Stokes dans un système en rotation

- Equations de Navier-Stokes ont été établies dans un système inertiel
- Considérons maintenant **B** = **r**, où **r** est le vecteur position

$$\mathbf{v}_I = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I = \mathbf{v}_R + \Omega \times \mathbf{r}$$

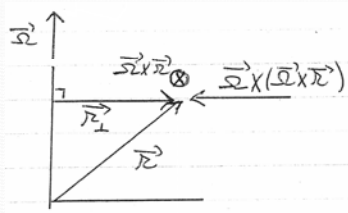
$$\left(\frac{d\mathbf{v}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\left(\mathbf{v}_R + \Omega \times \mathbf{r}\right)}{dt}\right)_I$$
$$= \left(\frac{d\left(\mathbf{v}_R + \Omega \times \mathbf{r}\right)}{dt}\right)_R + \Omega \times \mathbf{v}_R + \Omega \times \left(\Omega \times \mathbf{r}\right)$$
$$= \left(\frac{d\mathbf{v}_R}{dt}\right)_R + 2\Omega \times \mathbf{v}_R + \Omega \times \left(\Omega \times \mathbf{r}\right)$$

Accélération de Coriolis

Accélération centrifuge

Gravité apparente

- **Force centripète:** $\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})$



- **On peut montrer que**

$$\nabla\times\left(\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})\right)=0$$

- **Conséquemment, on peut trouver une fonction potentielle Φ_C telle que**

$$\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})=+\nabla\Phi_C$$

- **Force gravitationnelle:** $\mathbf{f}_{gravit.}=-\nabla\Phi_G=-\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r$

Gravité apparente

- **Pour l'atmosphère, le rayon de la Terre peut être considéré comme constant,** $r\cong a+z$ **et**

$$a\cong 6.4\times10^3\,km$$

- **Conséquemment,** $\mathbf{f}_{gravit.}\cong -g_*\,\mathbf{e}_r$ **et** $g_*=\frac{GM}{a^2}$

- **Pour un observateur à la surface, on perçoit**

$$\boxed{\mathbf{f}_{appar.}=\mathbf{f}_{grav}-\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\mathbf{r}\right)=-\nabla\left(\Phi_C+\Phi_{gravit.}\right)\equiv-\nabla\Phi_{appar.}}$$

où

$$\Phi_{appar.}=\Phi_{gravit.}-\left\|\frac{\vec{\Omega}\times\mathbf{r}}{2}\right\|^2$$

Gravité apparente

- **Choisissant la verticale comme étant**

$$\mathbf{k}=-\frac{\nabla\Phi_{appar.}}{\left\|\nabla\Phi_{appar.}\right\|}$$

ces deux forces se combinent pour donner que

$$\mathbf{f}_{grav.app.}\equiv-g\,\mathbf{k}$$

où g = 9.8 ms^{-2} mais qui subit une légère variation avec la latitude (minimum à l'équateur)

- **La surface terrestre est une équipotentielle de la gravité apparente.**
  - Rayon de la Terre est allongé d'environ 21 km à l'équateur

Equations de Navier-Stokes dans un système en rotation uniforme

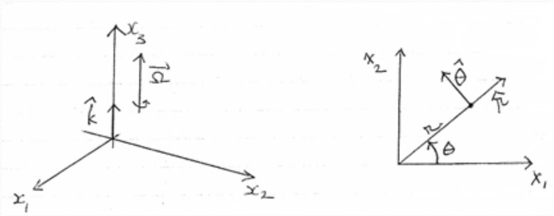
- **Equation de Navier-Stokes devient:**

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_R=-2\left(\vec{\Omega}\times\mathbf{v}_R\right)-\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\mathbf{r}\right)-\frac{1}{\rho}\overline{\nabla\varphi_{grav}}-\frac{1}{\rho}\overline{\nabla p}+\nu\nabla^2\mathbf{v}_R$$

- **En introduisant la gravité apparente, on obtient**

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-2\,\vec{\Omega}\times\mathbf{v}-g\mathbf{k}-\frac{1}{\rho}\overline{\nabla p}+\nu\nabla^2\mathbf{v}}$$

Ecoulement plan en rotation uniforme



- En coordonnées polaires dans le plan (x_1, x_2), on a

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad \nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rv_\theta - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

- Identité vectorielle:

$$(\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}{2}\right) + (\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}$$

Dérivée matérielle en coordonnées cylindriques pour un écoulement 2D

Considérant un écoulement où $v_z = 0$

Comme

a)
$$\nabla\left(\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}{2}\right) = \nabla\left(\frac{v_r^2}{2}+\frac{v_\theta^2}{2}\right) = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r^2}{2}+\frac{v_\theta^2}{2}\right) + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_r^2}{2}+\frac{v_\theta^2}{2}\right)$$
$$= \hat{\mathbf{r}}\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{v_r}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)$$

et que

b)
$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rv_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

alors
$$(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}\left(-\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial rv_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right) + \hat{\theta}\left(\frac{v_r}{r}\left(\frac{\partial rv_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right)$$

Donc:
$$\boxed{(\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}\left(-\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{v_r v_\theta}{r} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)}$$

Expression des équations de Navier-Stokes

- **En négligeant la viscosité $\nu = 0$:**

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\vec{\Omega}\times\mathbf{v} - g\mathbf{k} - \frac{1}{\rho}\overline{\nabla p}}$$

- **Expression en coordonnées polaires:**

$$\boxed{\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta^2}{r} - 2\Omega v_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}} \qquad \text{(1-a)}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + 2\Omega v_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}} \qquad \text{(1-b)}$$

- **Equation de continuité:**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Solutions axisymétriques: v = v(r)

- **Equation de continuité implique que**

$$\frac{\partial}{\partial r}rv_r = 0 \quad\Rightarrow\quad v_r = \frac{C}{r}$$

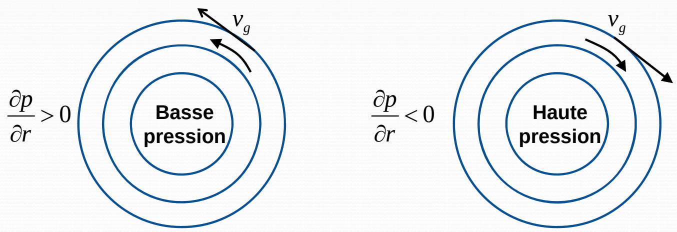
- **Conséquemment, $v_r = 0$ et l'équation (1-a) devient alors**

$$\underbrace{-\frac{v_\theta^2}{r}}_{\text{Force centrifuge}}\ \underbrace{-\,2\Omega v_\theta}_{\text{Force de Coriolis}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}}_{\text{Gradient de pression}}$$

Equilibre géostrophique

- **Equilibre entre la force de pression et la force de Coriolis**

$$2\Omega v_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow v_g = \frac{1}{2\Omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$



Equation du vent gradient (Holton)

- **Equilibre entre trois forces:** $\frac{v_\theta^2}{r} + 2\Omega\left(v_\theta - v_g\right) = 0$
  - Coriolis
  - Gradient de pression
  - Centrifuge
- **Nombre de Rossby:** $R_o = \frac{v_\theta}{2\Omega r}$
- **Nombre de Rossby géostrophique:** $R_{og} = \frac{v_g}{2\Omega r}$
- **Forme alternative:** $R_o^2 + R_o - R_{og} = 0$
- Réf.: J.R. Holton, *An Introduction to Dynamic Meteorology*, ch. 3

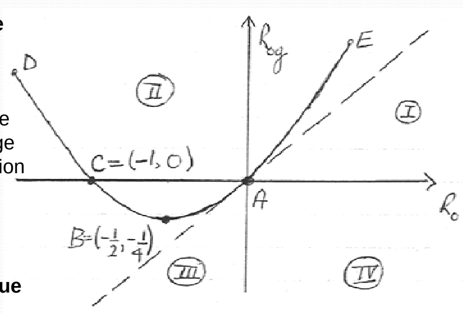
Equilibres possibles

A. Ecoulement géostrophique
Equilibre pression-Coriolis

B. Zones de haute pression
Limite imposée au gradient de pression car la force centrifuge s'ajoute au gradient de pression

C. Mouvement inertiel
Equilibre centrifuge-Coriolis

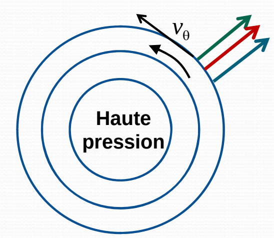
D,E. Mouvement cyclostrophique
Equilibre centrifuge-pression
Zones de basse pression seulement



Région IV

- **Aucun équilibre possible**

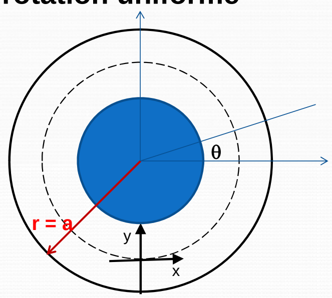
- **C: force de Coriolis**
- **F_p: force de pression**
- **F_c: force centrifuge**



$$\frac{\partial p}{\partial r} < 0 \Rightarrow R_{og} < 0$$

Modèle sur un plan en rotation uniforme (eaux peu profondes)

- **Considère un mouvement 2D pour un fluide en rotation uniforme**



$$x = r\theta$$
$$y = a - r$$
$$u = r v_\theta$$
$$v = -v_r$$

Equations en coordonnées cartésiennes

$$\frac{du}{dt} - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\frac{dv}{dt} + 2\Omega u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial y}$$
$$\frac{dh}{dt} = -\left(H_0 + h\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Equilibre géostrophique

$$-2\Omega v = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$2\Omega u = -g\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\Psi$$
$$\Psi = \frac{gh}{2\Omega} \triangleq \frac{\Phi}{2\Omega} = \frac{Géopotentiel}{2\Omega}$$

Conclusion

- **La présence de rotation donne lieu à différents types d'ondes observées dans l'atmosphère**
  - Ondes de Rossby associées à la variation latitudinale de la force de Coriolis
  - Ondes inertielles
  - Ondes mixtes de gravité-Rossby
- **Méthodes présentées ici sont utilisées pour étudier ce type d'ondes également**